Arraid Journal of Science and Technology
Higher Institute of Science and Technology-Shmokh

مجلة الرائد للعلوم والتقنية
المعهد العالي للعلوم والتقنية ـ الشموخ

تاريخ الإستلام: 12-06-2026 | تاريخ القبول: 30-06-2026 | تاريخ النشر: 30-06-2026

دالة ميتاج ليفلر: دراسة تحليلية و تطبيقاتها في الحساب الكسري

The Mittag-Leffler Function: An Analytical Study and Its Applications in Fractional Calculus

علي أبوشناف علي
المعهد العالي للتقنيات الهندسية بني وليد
alibra2071@gmail.com

الملخص
يقدم هذا البحث تحليلاً معمقاً لـدالة ميتاج ليفلر وما مرت به من تطور بنيوي بدءاً من الشكل أحادي المعامل وانتهاءً بالصيغة ثنائية وثلاثية المعاملات (دالة برابهكار) ، مع توضيح روابطها الوثيقة بالدوال الخاصة وبدالة فوكس H ، ويتضمن كذلك تمثيلا رقميا للدالة و رسم خصائصها التقاربية ونموها الفائق الأسي باستخدام لغة البايثون ،كما يختتم بعرض لمجالات استخدامها في حل المعادلات التفاضلية الكسرية ونمذجة الظواهر المرنة اللزجة والانتشار الشاذ.

الكلمات المفتاحية : التفاضل الكسري، دالة ميتاج ليفلر ، دالة برابهاكار ، دالة فوكس H ، الاسترخاء الكسري .

Abstract

This research provides an in-depth analysis of the Mittag-Leffler function and its structural evolution, tracing its development from the classical single-parameter form to the two- and three-parameter configurations (the Prabhakar function), while elucidating its close connection to special functions and Fox's *H*-function. Furthermore, it incorporates a numerical representation of the function, delineating its asymptotic properties and hypersonic growth through Python simulations. The study concludes with an overview of its applications in solving fractional differential equations and modelling viscoelastic phenomena as well as anomalous diffusion.

1. المقدمة

اصبح الحساب الكسري محط اهتمام متزايد خلال العقود المنصرمة في الأوساط الرياضية والهندسية والفيزيائية ، وذلك لما يتمتع به من قدرة فائقة على وصف الأنظمة ذات الخصائص التذكارية والتأثيرات غير الموضعية ، وهي سمات يعجز التفاضل والتكامل التقليدي عن التعبير وقد نتج عن هذا التطور ظهور نماذج رياضية عديدة تعتمد على المشتقات والتكاملات غير

الصحيحة في تفسير الظواهر المعقدة كالانتشار الشاذ واللزوجة المرنة وانتقال الحرارة والأنظمة الحيوية ومعالجة الإشارات , وتعد دوال ميتاج – ليفلر إحدى أبرز الدوال الخاصة في هذا المجال ، إذ تمثل التوسع الطبيعي للدالة الأسية في سياق المعادلات التفاضلية الكسرية ، بما يوازي الدور المحوري الذي تؤديه الدالة الأسية في المعادلات التفاضلية الاعتيادية . وقد شهدت هذه الدوال تطورا ملحوظا منذ ظهورها بصيغتها التقليدية إلى تعميمات أشمل ، منها دالة ميتاج – ليفلر ذات المعلمتين و دالة برايهاكار ذات الثلاثة معاملات ، مما أدى إلى توسيع مجال استخدامها في الرياضيات التطبيقية والفيزياء والهندسة . تسعى هذه الدراسة إلى تقديم تحليل رياضي معمق لدوال ميتاج – ليفلر ومشتقاتها ، من خلال استعراض التعريفات الأساسية ودراسة خصائصها التحليلية وعلاقتها بالدوال الخاصة وتمثيلاتها التكاملية وتحويلاتها المتعددة ، مع إبراز أهميتها الجوهرية في حل المعادلات التفاضلية الكسرية . كما تستكشف الدراسة مجموعة من التطبيقات الفيزيائية والديناميكية التي تؤكد الدور المحوري لهذه الدوال في نمذجة الأنظمة ذات الذاكرة وظواهر الاسترخاء التكاملي والانتشار غير الاعتيادي، مما يعزز مكانتها كركيزة أساسية من ركائز الحساب الكسري المعاصر . يهدف هذا البحث إلى تقديم دراسة تحليلية شاملة لدوال ميتاج–ليفلر وتعميماتها، مع استقصاء خصائصها التحليلية وتمثيلاتها التكاملية وعلاقاتها بالدوال الخاصة. كما يهدف إلى تحليل تحويلاتها التكاملية وسلوكها العددي والتقاربي وإبراز دورها في إيجاد الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية الكسرية. ويسعى البحث إلى توضيح أهميتها بوصفها إطارًا رياضيًا متقدمًا لنمذجة الأنظمة ذات الذاكرة والظواهر الفيزيائية غير المحلية في الحساب الكسري. تتمثل مشكلة البحث في قصور أدوات التفاضل والتكامل التقليدية عن التعبير الدقيق عن الأنظمة ذات الذاكرة والخصائص غير المحلية، مما يطرح حاجة ماسة لتقديم تحليل رياضي ونمذجة عددية شاملة لدالة "ميتاج - ليفلر" وتعميماتها لدورها المحوري في حل المعادلات التفاضلية الكسرية .

2.الدراسات السابقة

في إطار استعراض الدراسات السابقة ، فقد تم اختيار هذه الدراسة الحديثة التي لها صلة مباشرة بموضوع هذه البحث ، وهذه الدراسة بعنوان

An Alternative Three-Parameter Mittag-Leffler Function without the Pochhammer Symbol .

للباحثات E. E. Iyeme, O. R. Okpo

المنشورة في مجلة

International Journal of Mathematics and Physical Sciences Research ISSN 2348-5736 (Online) .

Vol. 14, Issue 1, pp: (59-63), Month: April 2026 - September 2026, Available at: www.researchpublish.com

أوجه الاتفاق مع البحث الحالي:

- تناول البحثان دالة ميتاج–ليفلر بوصفها من أهم الدوال الخاصة في حساب التفاضل والتكامل الكسري .
- يعتمد البحثان على دراسة الخصائص التحليلية للدالة وتمثيلها بمتسلسلات القوى .

- يناقش البحثان تطبيقات الدالة في حل المعادلات التفاضلية الكسرية باستخدام تحويل لابلاس .
- يهدف يهدف البحثان إلى إبراز الدور المركزي لدالة ميتاج–ليفلر في نمذجة الأنظمة ذات الذاكرة.

أوجه الاختلاف:

- ركزت الدراسة السابقة على اقتراح تعريف جديد لدالة ميتاج–ليفلر ثلاثية المعلمات بإزالة رمز بوشهامر، بينما لم تقترح الدراسة الحالية تعريفًا جديدًا، وإنما قدمت دراسة تحليلية شاملة لتطور الدالة من المعلمة الواحدة إلى المعلمتين ثم إلى دالة برابهاكار.
- اقتصرت الدراسة السابقة على الجانب النظري للدالة ثلاثية المعلمات، في حين تناول البحث الحالي العلاقات بين دالة ميتاج–ليفلر والدوال الخاصة مثل الدالة الأسية والدوال المثلثية ودالة الخطأ ودالة فوكس H، مع عرض خصائصها التحليلية بصورة أوسع.
- تميز البحث الحالي بإضافة رسوم عددية باستخدام لغة Python وجداول للقيم العددية وتحليل السلوك البياني للدالة، وهو جانب لم يكن محور الدراسة السابقة .
- يقدم البحث الحالي معالجة متكاملة للتطبيقات على معادلات الاسترخاء الكسرية وبعض النماذج الفيزيائية، بينما ركزت الدراسة السابقة على البنية الرياضية للدالة الجديدة وخصائصها الأساسية .

3. التفاضل والتكامل الكسري Fractional calculus : يعرف التفاضل والتكامل الرتب الكسرية بأنه توسيع لمبادئ الاشتقاق والتكامل ليشمل الرتب الحقيقية والعقدية، وتتبع أهميته الجوهرية من قدرته على نمذجة الأنظمة التي تتسم بخصائص الذاكرة الطويلة والتأثيرا ت غير المحلية بشكل رياضي أكثر دقة، مما يجعله إطارا نظريا وتطبيقيا حيويا في وصف مختلف الظواهر المعقدة في الفيزياء والهندسة ومعالجة الإشارات [1].

3-1 التعاريف الشائعة للمشتقات والتكاملات الكسرية:

The popular definitions of Fractional derivative integrals

3-1-1 التكامل الكسري لريمان ليوفيل[4]: لتكن f دالة معرفة وقابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ ولتكن $\alpha \in \mathbb{C}$ و $\Re e(\alpha) > 0$ يعرف تكامل ريمان ليوفيل من الرتبة α بالعلاقة .

$$ {}^{\mathrm{RL}}_{a}\mathrm{I}^{\alpha}_{t} = {}^{\mathrm{RL}}_{a}\mathrm{D}^{-\alpha}_{t} = \mathrm{I}^{\alpha}_{+a}(t) = \frac{1}{\Gamma\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,d\tau \ , \ \ a < t $$

وبالمثل يعرف التكامل من الجهة اليمنى

$$ {}^{\mathrm{RL}}_{t}\mathrm{I}^{\alpha}_{b} f(t) = {}^{\mathrm{RL}}_{t}\mathrm{D}^{-\alpha}_{b} f(t) = \mathrm{I}^{\alpha}_{b-} = \frac{1}{\Gamma\alpha}\int_t^b (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,d\tau \ , \ \ t < b $$

3-1-2 مشتقة ريمان ليوفيل من الرتب الكسرية [3]:

تعرف المشتقة من نوع ريمان ليوفيل من الجهة اليسرى ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+} f$ والجهة اليمنى ${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}_{b-} f$ كما يلي $n = [\Re e(\alpha)] + 1 \ , \ \ \alpha \in \mathbb{C}$

$$ \left({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+} f\right)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left({}^{RL}\mathrm{I}^{n-\alpha}_{a+}\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\,d\tau \ , \ \ t > a $$

$$ \left({}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}_{b-} f\right)(t) = \left(\frac{-d}{dt}\right)^n \left({}^{RL}\mathrm{I}^{n-\alpha}_{b-} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{-d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\,d\tau \ , \ \ t < b $$

إذ أن يشير $[\Re e(\alpha)]$ كما هو الحال في الجزء الصحيح من الجزء الحقيقي للعدد α

3-1-3 مشتق كابوتو الكسري Caputo fractional derivative[3]:

يستند تعريف مشتق كابوتو الكسري الى مشتق ريمان ليوفيل (RL) الكسري وعلى توسيع متسلسلة تايلور وفي الحالات التي تنتمي فيها رتبة المشتق تنتمى الى مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، فإن مشتق ريمان ليوفيل وكابوتو يتطابقان تماما. لتكن $I = [a,b]$ فترة محدودة على خط الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، ولتكن $n = [\Re e(\alpha)] + 1, \alpha \in \mathbb{C}$ يعرف مشتق كابوتو الكسري من الجانب الايسر والجانب الأيمن ، على التوالي كما يلي

$$({}^{c}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t f^n(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau = [{}^{RL}\mathrm{I}_{a+}^{n-\alpha}(\frac{d}{dt})^n f](t)$$

$$({}^{c}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b f^n(t)(\tau-t)^{n-\alpha-1} d\tau = (-1)^n [{}^{RL}\mathrm{I}_{b-}^{n-\alpha}(\frac{d}{dt})^n f)(t)$$

يُعد كل من مشتقي ريمان-ليوفيل وكابوتو الكسرين واسعي الانتشار في المجالات التطبيقية ، ومع ذلك يعتبر مشتق كابوتو اكثر مرونة عند التعامل مع المعادلات التفاضلية الكسرية.

3-1-4العلاقة بين كابوتو و ريمان ليوفيل[14]: يربط النص بين المؤثرين بواسطة طرح متعدد حدود تايلور للدالة عند نقطة البداية

تمهيد(1) :-لتكن $\alpha > 0$ و$n = [\alpha]$ حيث n هو عدد صحيح أكبر من أو يساوي α ونفرض أن الدالة f تحقق شروط وجود كلا من مشتق كابوتو ${}_{a}^{c}\mathrm{D}_{t}^{\alpha}$ ومشتق ريمان -ليوفيل ${}_{a}^{RL}\mathrm{D}_{t}^{\alpha}$ فإن

$${}_{a}^{c}\mathrm{D}_{c}^{\alpha} f(t) = {}_{a}^{RL}\mathrm{D}_{t}^{\alpha} f(t) - [\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{D}^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}]$$

البرهان :- بناء على تعريف مشتق كابوتو(2-2-3)

$${}_{a}^{c}\mathrm{D}_{t}^{\alpha} f(t) = {}_{a}^{RL}\mathrm{D}_{t}^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{D}^k f(a)}{k!}[(.-a)^{\alpha}(t)]$$

$$= {}_{a}^{RL}\mathrm{D}_{t}^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{D}^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}$$

وهذا يدل على أنه في الحالات التي تكون فيها جميع المشتقات $k = 0,1,2 \dots \dots n\ f^k(a) = 0$ فإن مشتقة كابوتو تتطابق كليا مع مشتقة ريمان – ليوفيل.

4- دالة ميتاج ليفلر Leffler-The Mittag function:

تُعد دوال ميتاج ليفلر بمثابة العمود الفقري " لحساب التفاضل والتكامل الكسري" فكما أن الدالة الاسية e^z هي الحل الطبيعي للمعادلات الخطية ذات الرتب الصحيحة و دوال ميتاج ليفلر هي الحل الطبيعي للمعادلات التفاضلية الكسرية.

1-4 التعريف الأصلي لدالة ميتاج ليفلر الكلاسيكية :-

1-1-4 التعريف بسلسلة القوى (دالة ميتاج -ليلفر بپارامتر واحد)[5]:

تعرف دالة ميتاج – ليفلر الكلاسيكية ذات المعامل الواحد $\Re e(\alpha) > 0$ والتي يرمز اليها بالرمز $\mathrm{E}_{\alpha}(z)$ بإنها دالة كاملة *(entire)* في المستوى المركب وتعطي بسلسلة القوى التالية

$$\mathrm{E}_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \Re e(\alpha) > 0, \ z \in \mathbb{C}, \quad (1-1-3)$$

المعلمة αهي التي تتحكم في قوة الدالة وسلوكها . وبناء على ذلك عندما تكون $\alpha = 1$ نحصل على

$$\mathrm{E}_1(\pm z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^{\pm z} \qquad (2-1-3)$$

2-1-4 العلاقة بالدوال الأولية والخاصة[6]:

Relation to Elementary and function special functions

تكمن عبقرية دالة ميتاج – ليفلر في كونها "دالة جامعة" إذ لا تقتصر على كونها دالة مستقلة وإنما تشكل هيكلا رياضيا يحتوي في طياته أغلب الدوال التي تخدم المجالات الفيزيائية والهندسية، حيث يعتمد الشكل الناتج للدالة على قيمة المعامل الكسري α .

1-2-1-4 صيغة شمولية للدوال الأولية-: عندما نختار قيما محددة ل α تنهار المتسلسلة المعقدة لتتحول الى دوال جبرية ومثلثية معروفة ، كما هو موضح في التطابقات التالية .

1-الحالة الاسية (الرتبة الكلاسيكية$(\alpha = 1$:- عندما تكون$\alpha = 1$ فإن دالة ميتاج – ليفلر تتطابق تماما مع الدالة الاسية، هذا يعني أن التفاضل الكسري عند الرتبة 1 هو تماما التفاضل التقليدي ، كما في الدالة (2-1-3) ، وهذه الدالة تؤدي كحل لأنظمة النمو الخطي التي لا تمتلك ذاكرة .

2-الحالة المثلثية والزائدية (الرتبة الثانية $\alpha = 2$)[4]: عندما تصبح الرتبة كسرية بمقدار $(\alpha = 2)$ في المتسلسلة تظهر الدوال الدورية (المثلثية) .

$$E_2(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = cosz \qquad (2-2-3)$$

هذه الحالة تصف السلوك التذبذبي الحر(free oscillatory behavior) تعني أن دالة ميتاج-ليفلر عند الرتبة 2 تؤدي كحل لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة(simple harmonic motion) بينما تمثل تبولوجيا هذه الدالة دورانا مستمرا في المستوى المركب دون اضمحلال ، وهي الحالة الحدية التي تنتقل فيها الأنظمة الكسرية من التحلل إلى التذبذب الكامل. اما علاقة دالة ميتاج بدالة جيب التمام الزائدي coshz فتمثل بالمتطابقة التالية .

$$E_2(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = coshz \qquad (2-2-3)$$

هذه الدالة تصف النمو الزائدي المتناظر ، أي تصف توزيعات الاستقرار في أنظمة النقل التي لا تعتمد على الزمن ، أو العمليات التي تظهر نموا متسارعا متماثلا حول نقطة الأصل.

3-دالة الخطأ والارتباط بالاحتمالات : تكتب دالة ميتاج ليفلر أهمية استثنائية عند اتخاذ المعلمة α قيما نصف صحيحة إذ ان تشكل جسرا تحليليا يربط بين المتسلسلات الكسرية ودوال الاحتمالات الهندسية و تتجسد هذه الصيغة الجوهرية التالية.

$$E_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm 1) z^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)} = e^z[1 + \mathrm{erf}(\pm z^{\frac{1}{2}})] = e^z erfc(\pm z^{\frac{1}{2}}) (4-2-3)$$

حيث يمثل erf, erfc دالة الخطأ error function ودالة الخطأ المتمم complementary error function على التوالي ،واللتان يتم تعريفهما في المستوى المركب $\mathbb{C}$ وفق التكاملات المعيارية الاتية .

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du \, , erfc(z) = 1 - \mathrm{erf}(z) \, , \; z \in \mathbb{C} \qquad (5-2-3)$$

ومن المنظور التحليلي ، يحد د المتغير $z^{\frac{1}{2}}$ بأختياره الفرع الرئيسي (principal branch) للدالة ذات القيم المتعددة ، مع تحدي د القطع الفرعي على أمتدا د نصف القطر الحقيقي السالب لضمان التناغم والانتظام في النطاق العقد ي . علاوة على ذلك يمكن تعميم هذه الروابط لتشمل المعالم نصف الصحيحة من الرتب العليا ، حيث تخضع الدالة لصيغة $E_{\frac{p}{2}}(z)$عامة تربطها بالدوال فوق الهندسية

مما يتيح توصيفا دقيقا للأنظمة الفيزيائية التي تظهر سلوكا انتقاليا بين التحلل الاسئ الجبري ، ولا سيما في نماذج الانتشار الشاذ (Anomalous diffusion) .

4-1-2-2 التوصيف الفوق الهندسي والحوسبة الخوارزمية [6]:

Hypergeometric characterization and Algorithmic computing

من الناحية الحسابية يعتبر التعبير عن دالة ميتاج – ليفلر باستخدام الدوال الفوق هندسية المعممة ${}_pF_q$ من بين اقوى الأساليب لحساب القيم العددية بدرجة عالية من الدقة ، حيث يُمكن التميز في إمكانية توظيف تقنيات حسابية أصلية متوفرة في المكتبات الرياضية القياسية ، مما يضمن أعلى درجات الثبات العددي وتجنب أخطاء التراكم الحسابي الناجمة عن التقريب في السلاسل اللانهائية التقليدية و عند دراسة المعالم نصف الصحيحة من الرتبة $\frac{p}{2}$ (حيث $p \in \mathbb{N}$ وعدد فردي) ، إذ يمكن تفكيك البنية الرياضية للدالة إلى مركبتين تبولوجيتين متكاملتين .

$$E_{\frac{p}{2}}(z) = {}_0F_{p-1}:\left(\frac{1}{p},\frac{2}{p},\frac{3}{p}\ldots\frac{p-1}{p};\frac{z^2}{p^2}\right)+\frac{2^{\frac{p+1}{2}}z}{p!\sqrt{\pi}}F_{2p-1}\left(1;\frac{p+2}{2p};\frac{p+3}{2p}\ldots\ldots\frac{3p}{2p};\frac{z^2}{p^p}\right)$$

حيث الجزء الأول الجانب الزوجي والجزء الثاني الجانب الفردي و ${}_pF_q$ تمثل الدالة فوق الهندسية من النوع $(p\,,q)$.

تتبع الصيغة (3-2-1) و (3-2-2) من التعريف (3-1-1) لإثبات الصيغة (3-2-4) ، نفرض أن $z^{\frac{1}{2}}$ هو النوع الرئيسي متعدد القيم مع تعريف z مكان $z^{\frac{1}{2}}$.

$$E_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m}}{\Gamma(m+1)}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m+1}}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} = u(z)+v(z)$$

ويمكن توضيح المصطلحات التي وردت :

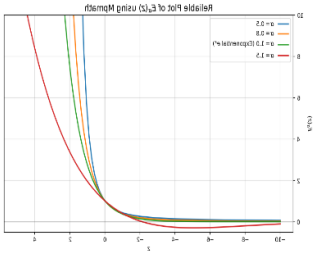
1- الفرع الرئيسي (principal branch): في الدوال متعددة القيم (مثل الجدر التربيعي في المستوى المركب) ، يتم اختيار فرع واحد لضمان استمرارية الدالة وجعلها أحادية القيمة ضمن نطاق محدد.

2- القطع الفرعي (branch cut): هو قيد مجاني (Domain restriction) يفرض على المستوى المركب لتحويل الدالة من كيان متعدد القيم إلى دالة تحليلية أحادية القيمة ، وذلك عبر الدوران الكامل حول نقطة التفرع الذي يحد ث قفزات طوريه متناقضة (contradictory phase jump) أي تقلبا ت مفاجئة في الطور الزاوي تؤدي الى تناقض او انقطاع في السلوك الرياضي هذا التدبير يكفل استقرار الحلول واتساقها من النواحي الفيزيائية والحسابية ، إذ يحصر جميع الانقطاعات الرياضية في مسار محدد (على طول المحور السالب) بعيدا عن نطاق الدراسة الرئيسي .

جدول (1): القيم العددية لدالة ميتاج أحادية المعالم $E_{\alpha}(z)$ المحسوبة باستخدام لغة البايثون

```
==== RESTART: C:/Users/21892/AppData/Local/Programs/Python/Python313/nnn.py ====
نتائج دالة ميتاج-ليفلر (alpha=0.5, beta=1.0):

         z |                    Re(E) |                    Im(E)
-----------------------------------------------------------------
       -10 |         0.056140992743823 |         0.000000000000000
        -5 |         0.110704637733069 |         0.000000000000000
        -1 |         0.427583576155807 |         0.000000000000000
         0 |         1.000000000000000 |         0.000000000000000
         1 |         5.008980080762283 |         0.000000000000000
         5 | 1440097986674.661041259765625 |         0.000000000000000
        1j |         0.367879441171442 |         0.607157705841394
>>>
```



شكل (1)
دالة ميتاج ليفلر لمعلمة واحدة في بعدين وثلاثة أبعاد (الرسم بواسطة لغة البايثون)

2-4 دالة ميتاج ليفلر بمعلمتين The Two-Parameter Mittag–Leffler Function:

1-2-4 تعريف: تعرف دالة ميتاج ذات المعلمتين [7]، والتي يرمز لها بالرمز $E_{\alpha,\beta}(z)$ بإنها تعميم للدالة الاسية والمتسلسلة الهندسية ، وتعطي من خلال تمثيلها بمتسلسلة القوى (power serie) التالية :-

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad , \quad (z\in\mathbb{C},\alpha,\beta\in\mathbb{C}.\Re e(\alpha)>0) \qquad (1-2-3)$$

وتعد هذه الدالة كاملة في المستوى العقدي لجميع قيم المعالم α,β التي تحقق الشرط $\Re e(\alpha)>0$ وتتميز هذه المتسلسلة بتقاربها المطلق لكل $z\in\mathbb{C}$،إذ أن نصف قطر التقارب R يعطي وفقا لاختبار النسبة.

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\Gamma[\alpha(k+1)+\beta}{\Gamma(\alpha k+1)}\right|=\infty$$

وبناء عليه ، فإن $E_{\alpha,\beta}(z)$ لا تملك أي نقاط منفردة (singular) في المستوى العقدي المحدد، وهي رتبة ذات رتبة (order) تحليلية تعطي بالعلاقة $\rho = \frac{1}{\Re e(\alpha)}$. وعموما $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$.

تجسد دالة ميتاج-ليفلر ذات المعلمتين $E_{\alpha,\beta}(z)$ توسعا بنيويا متفوق ا لمجموعة من الدوال التحليلية، إ ذ تختزل فيجوفها الدالة الأسية، والدوال المثلثية والزائدية، ودالة الخطأ المكملة كحالات استثنائية عند اختبار قيم محددة للمعلمتين(α, β) وتعمل هذه الدالة كحلقة وصل رياضية تربط بين سلوكيات النمو الأسي والاضمحلال الجبري والتذبذب الدوري، مما يمنحها قدرة فائقة على محاكاة الظواهر الفيزيائية المعقدة التي تفوق النطاق التقليدي للحساب التفاضلي ذي الرتب الصحيحة.

2-2-4 العلاقة بالدوال الأولية والخاصة :[9][10]

Relation to Elementary and function special functions

1- العلاقة مع الدالة الاسية :- تع د الدالة الاسية حالة خاصة بسيطة من دالة ميتاج – ليفلر عندما تصبح المعلمات $\alpha = 1, \beta = 1$.

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

وهذه العلاقة هي السبب في استخدام دالة ميتاج في عمليات النمو والاضمحلال في الأنظمة ذات الرتب الكسرية ، تماما كما تستخدم e^z في الأنظمة ذات الرتب الصحيحة.

2- العلاقة مع الدوا ل المثلثي ة الزائدية : - تبين الدوال المثلثية عند اختيار $\alpha = 2$ وهي علاقة جوهرية في دراسة التذبذبات الكسرية .

$$(a) E_{1,1}(-z^2) = cosz\,,(b)\ E_{2,1}(z^2) = coshz\,,(c)\ zE_{2,2}(-z^2) = sinz\ (d)$$

$$(d)\ zE_{2,2}(z^2) = sinhz$$

3- العلاقة مع المتسلسلة الهندسية : - في الحالات الحدية يمكن للدالة أن تمثل متسلسلة هندسية

$$E_{0,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(0k+1)} = \frac{1}{1-z} \quad , \quad |z| < 1$$

4- العلاقة مع دالة الخطأ: ترتبط دالة ميتاج – ليفلر بدالة الخطأ المكملة (erfc) وهي علاقة تظهر بكثرة في مسائل الانتشار (diffusion).

$$E_{\frac{1}{2}}(z) = e^z\left[1 + erfc\left(\pm\sqrt{z}\right)\right] = e^z erfc\left(\pm\sqrt{z}\right) \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

حيث يرمز (erfc) إلى دالة الخطأ المكملة وتعرف كالاتي:

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2}\, du\,,\ \text{erfc}\,(z) = 1 - \text{erf}(z) \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

وهذا يفسر سبب ظهور دالة ميتاج – ليفلر في حلول معادلة الانتشار الكسرية.

3-2-4 علاقة دالة ميتاج – ليفلر بمعلمتين بدوال فوكسH:

Mittag-"Relationship of the two functions Mittag Leffler function with fox H-function

تمثل دالة ميتاج ذات المعلمتين حالة اختزالية محددة ضمن الهيكل التحليلي العام لدالة فوكس

Fox-H ،حيث يصاغ هذا الارتباط تخصيص نواة تكاملات ميلين -بارنز(Mellin – Barnes) وتكمن الأهمية الجوهرية لهذه العلاقة في توحيد التوصيف الرياضي للعمليات الديناميكية غير المحلية ، مما يتيح استنباط الخصائص التقاربية والتكاملية لدالة ميتاج- ليفلر من خلال الفضاءات الدالية الممتدة لدوال فوكس H **[11][2]**.

مبرهنة (1) :- (تمثيل دالة ميتاج -ليفلر بدلالة دالة فوكس H):- لتكن $E_{\alpha.\beta}(z)$ هي دالة ميتاج – ليفلر المعروفة بالمتسلسلة القوية لجميع قيم $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ حيث $\Re e(\alpha) > 0$ ، فإنه تمثيل هذه الدالة كحالة خاصة من دالة فوكس H الرتبة (2،1،1،1) وفقا للصيغة التكاملية التالية

$$E_{\alpha,\beta}(z) = H_{1,2}^{1,1}\left[-z\begin{bmatrix}(0,1)\\(0,1)\ ,\ (1-\beta,\alpha)\end{bmatrix}\right]$$

البرهان :-بواسطة تكامل ميلين بارنز Mellin Barnes

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma s\,\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-s\alpha)}(-z)^{-s}\,ds \qquad (1-2-3)$$

$$|argz| < \pi, \alpha \in \mathbb{R}^+\ ,\ \beta \in \mathbb{C}\ \ ,\ \ \Re(\alpha) > 0$$

Γ ومسار التكامل يفصل بين الأقطاب المتجهة لليسار والاقطاب المتجهة لليمين

نقوم بتحديد الأقطاب حيث تحتوي النواة التكاملية على نوعين من الأقطاب الناتجة من دوال جاما.

في البسط أقطاب Γs توجد عندما $s = 0,1,2,3, \dots \dots \dots$ وأقطاب $\Gamma(1-s)$ توجد عندما $s = k$ أقطاب بسيطة ، ولأتباب ث العلاقة مع متسلسلة دالة ميتاج نقوم بأغلاق مسار التكامل باتجاه اليسار ليحوي الأقطاب $s = -k$ ،وبعدها نحسب البواقي Residue بتطبيق نظرية البواقي عند النقاط $s = -k$ ، إذن

قيمة الباقي للدالة Γs عند القطب $s = -k$ $\qquad \mathrm{Res}(\Gamma s, -k) = \frac{(-1)^k}{k!}$

بناء عليه تصبح قيمة التكامل هي مجموع البواقي

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}[\lim_{s\to -k}(s+k)\frac{\Gamma s\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}(-z)^{-s}$$

وبالتعويض عن قيمة الباقي

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{k!}{\Gamma}(-1)^k z^k$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{K=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

وهذا تعريف دالة ميتاج - ليفلر

تعريف دالة فوكس H بالتكامل التالي

$$H_{p,q}^{m,n}\left[-z\begin{bmatrix}(a_p, A_p)\\(b_q, B_q)\end{bmatrix}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\chi(s)\,z^{-s}\,ds \qquad (2-2-3)$$

وتعريف دالة فوكس H يعتمد على نواة التكامل $\chi(s)$

$$\chi(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+B_j s)\prod_{j=1}^{n}(1-a_j-A_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}(1-b_j-B_j s)\prod_{j=n+1}^{p}(a_j+A_j)}$$

وبالمقارنة مع الصيغة المطلوب اثباتها

نجد أن المعاملات هي $m = 1, n = 1, p = 1 . q = 2$

البسط (نواة التكامل) $\qquad a_1 = 0, A_1 = 1 \Rightarrow \Gamma(1-a_1-A_1 s) = \Gamma(1-s)$

$$b_1 = 0, B_1 = 1 \Rightarrow \Gamma(b_1+B_1 s) = \Gamma s$$

بالنسبة للمقام

$$b_2 = 1-\beta, B_2 = \alpha \Rightarrow \Gamma(1-b_2-B_2 s) = \Gamma[1-(1-\beta)-\alpha s] = \Gamma(\beta-\alpha s)$$

إذن تصبح نواة التكامل $\chi(s) = \frac{\Gamma s\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}$ ، إذن تصبح العلاقة (3-2-2) على الصورة

$$H_{1,2}^{1,1}[-z] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma s\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}(-z)^{-s}\,ds \qquad (3-2-3)$$

من العلاقة (3-2-1) والعلاقة (3-2-3) نستنتج أن

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z) = H_{1,2}^{1,1}\left[-z\begin{bmatrix}(0,1)\\(0,1).\ (1-\beta,\alpha)\end{bmatrix}\right]$$

1-3-2-4 الأهمية التحليلية والتطبيقية لعلاقة دالة ميتاج ـليفلر بدوال فوكس H:

الارتباط في دمج دالة ميتا ج-ليفلر ضمن بنية دالة فوكسH :- تبرز القيمة التحليلية لهذا الارتباط في دمج دالة ميتا ج-ليفلر ضمن بنية دالة فوكسH الشاملة ، وهو ما يُتيح استقصاء خصائصها العقدية ودراسة سلوكها التقاربي عند النهايات باستخدام أدوات تكاملات ميلين -بارنز المتقدمة.

3-4 دالة برابهكار The Prabhakar function: ابتكر الباحث برابهاكار هذه الدالة عام 1971 بهدف الحصول على حلول تحليلية مغلقة لمعادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ذات النواة القائمة على الأسس، وتُعَدّ دالة ميتاج-ليفلر ذات الثلاثة معاملات (دالة برابهاكار) تطويراً متقدما للدالة الأسية، إذ تُوفّر درجة عالية من المرونة في نمذجة الظواهر الفيزيائية المركبة التي تشمل "الذاكرة " أو استرخاءً شاذاً.

وتتميز هذه الدالة بقدرتها الفائقة على حل المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية، مما يجعلها أداة أساسية في دراسة الأنظمة الديناميكية الحديثة [17][12].

1-3-4 تعريف: تعرف دالة برابهاكا ر والتي يرمز لها بالرمز $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ بانها دالة كاملة في المستوى العقدي ويمكن تمثيلها بواسطة متسلسلة القوى التالية :-

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{K=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k\ z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad ,(\alpha,\beta,\gamma)\in\ ,\Re e(\alpha)>0 \quad (1-3-3)$$

حيث يمثل الرمز $(\gamma)_k$ رمز برابهاكار أو المضروب المتصاعد والمعروف بدلالة دالة جاما

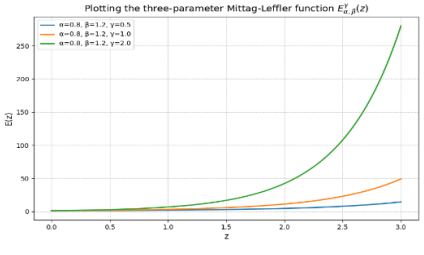
$$(\gamma)_k = \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma\gamma} = \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\ldots\ldots(\gamma+k-1)$$

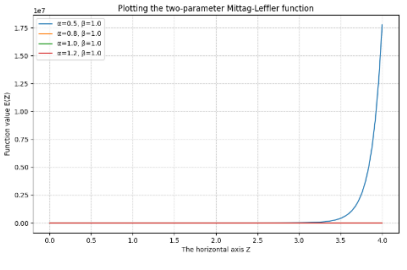
وتختزل هذه الدالة إلى صور أبسط عند تغيير قيم العالم

1- إذا كانت $\gamma = 1$ تعود إلى دالة ميتاج – ليفلر ذات معلمتين $\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z)$.

2- إذا كانت $\beta = 1\ \gamma = 1$ تعود إلى دالة ميتاج- ليفلر الأصلية $\mathrm{E}_{\alpha}(z)$.

3- إذا كانت $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ و $\gamma = 1$ نحصل على الدالة الأسية e^{z} .





شكل (2-ا) دالة ميتاج ثنائية المعالم شكل (2-ب) دالة ميتاج ثلاثية المعالم

شكل (2) دالة ميتاج تنائيه المعالم

5. الخصائص التحليلية الأساسية والتحويلات التكاملية لدوال ميتاج – ليفلر:

Basic analytic properties and integral transforms of Mittag-Leffler functions

1-5 التحويلات التكاملية Integral transforms :-[6] عند استخدام التحويلات التكاملية كتحويل لابلاس،وفورييه، وميلين ، فإن هذه الأدوات تشكل الالية الأساسية لكشف السلوك التحليلي لدالة ميتاج-ليفلر والانتقال بها من عالم المتسلسلات المعقدة إلى فضاءات جبرية مبسطة، وتكمن الأهمية العملية لهذه التحويلات في كونها الجسر الرياضي لنمذجة ظواهر الانتشار الشاذ وحل المعادلات التفاضلية والتكاملية ذات الرتب الكسرية في الفيزياء والهندسة .

1-1-5 تحويل ميلين بارنز: [6] تعد تكاملات ميلين – بارنز أداة قوية في التحليل العقدي لدراسة الدوال الخاصة و يعرف تحويل ميلين $\mathrm{E}(-x)$ حيث $x > 0$ و $0 < \alpha < 2$ بالصيغة التالية

$$\mu\{\mathrm{E}_\alpha(-x), s\} = \int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{E}_\alpha(-x)dx = \frac{\Gamma s\,\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha s)} \quad , \quad 0 < \Re(s) < 1$$

وتحويل ميلين – بارنز له أهمية تحليلية وتطبيقية

1- الأهمية التحليلية: يربط هذا التحويل دالة ميتاج مباشرة بنواتج قسمة دوال جاما ،مما يسهل دراسة خصائصها البنيوية وتحديد عزومها (moments)

2- الأهمية التطبيقية: - يستخدم بشكل واسع في حل معادلات الانتشار الكسرية وفي الإحصاء الكسري لتحديد دوال الكثافة الاحتمالية المرتبطة بالعمليات المستقرة.

2-1-5 تكامل ميلين :- يعرف تكامل ميلين الذي ي عد التحويل العكسي ويستخدم لتمثيل دالة ميتاج – ليفلر في المستوى العقدي .

$$\mathrm{E}_\alpha(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma s\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha s)}\,(-z)^{-s}\,ds$$

حيث يفصل مسار التكامل بين أقطاب Γs وأقطاب $\Gamma(1-s)$.

1- الأهمية التحليلية : - هو الأداة الرئيسية لإجراء الاستمرار التحليلي للدالة خارج قرص تقاربها ، عبر حساب الرواسب (Residues) عند اقطاب $\Gamma(1-s)$ ، و يتم استنتاج السلوك التقاريبي للدالة عند اللانهاية $(z \longrightarrow \infty)$ على شكل متسلسلة قوى سالبة .

$$\mathrm{E}_\alpha \sim -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)}$$

2- الأهمية التطبيقية: له تطبيقات في الفيزياء الرياضية لحساب الحلول في المدى الطويل للمعادلات التفاضلية الكسرية حيث يحدد معدل الاضمحلال الجبري للنظام.

3-1-5 تحويل لابلاس لدوال ميتاج :- [15] يُعد تحويل لابلاس أهم تحويل مرتبط بدالة ميتاج ، حيث يظهركحل طبيعي للمعادلات التفاضلية الكسرية بنفس الطريقة التي تظهر بها الدالة الاسية في المعادلات التفاضلية العادية .

1- تحويل لابلاس لدالة ميتاج ليفلر لمعلمة واحدة : - يُمثل تحويل لابلاس الركيزة الأساسية لربط دالة ميتاج ذات المعلمة الواحدة بالمعادلات التفاضلية الكسرية ، إذ إنه يحول الدالة

من صيغتها التحليلية المعقدة الى كسر جبري بسيط في فضاء المعاملات ، ويعرف تحويل لابلاس للدالة كالاتي

عند أدخال متغير t وثابت λ في متسلسلة ميتاج التي عرفت بالصيغة (3-1-1)

$$L\{E_\alpha(-\lambda t^\alpha)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, E_\alpha(-\lambda t^\alpha)dt = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \pm \lambda} \;.\; \Re e(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \;, \Re e(s) > 0$$

نلاحظ أن $\alpha = 1$ نصل الى الحالة العامة

$$L\{e^{-\lambda t}\} = \frac{1}{s+\lambda}$$

2- تحويل لابلاس لدالة ميتاج ذات معلمتين :- عند أدخال متغير زمني t وثابت λ في متسلسلة ميتاج (3-2-1) يعطي التحويل بالصيغة التالية

$$L\left\{t^{\beta-1}\, E^\gamma_{\alpha,\beta}(\pm\lambda t^\alpha)\right\} = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^\alpha \pm \lambda)^\gamma}$$

شرط التقارب $\Re e(s) > 0 \qquad \Re e(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}},$

5- 2الخصائص التحليلية الأساسية لدوال ميتاج: تُعتبر التمثيلات التكاملية أداة محورية في تحليل الخصائص السلوكية والتقاربية للدوال الكاملة (Entire functions) في ما يخص دالة ميتاج -ليفلر ثنائية المعالم $E_{\alpha,\beta}(z)$ ، يتم عملية استخلا ص التمثيلات التكاملية على هئية تكاملات معتلة على طول مسار هانكل C (Hankel contour) حيث تعامل إرديلي و زملاؤه مع الحالة الخاصة $\beta = 1$ في حين قام دجرياشيان (Djrbashian) بتعميم هذه النتائج تشمل الوسيط $\beta \in \mathbb{C}$ **[13].**

في هذا الإطار ينصب تركيزنا على النطاق $\alpha \in (0\,,2)$ نظرا لإمكانية إرجاع الحالات التي تحقق $\alpha > 2$ باستخدام صيغة التضاعف التالية .

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m} E_{\frac{\alpha}{2m+1}}\,, \beta(z^{\frac{1}{2m+1}}\; e^{\frac{2\pi i j}{2m+1}})$$

حيث $m = \left\lceil \frac{\alpha-1}{2} \right\rceil + 1$ تسمح هذه المتطابقة الرياضية بتعميم النتائج التحليلية المستخلصة للرتب الصغيرة على الرتب الأعلى بشكل مباشر ، ولغرض اشتقاق التمثيلات التكاملية في هذا النطاق نعرف أولا المسار $\Gamma_{\epsilon,\phi}$

$$\Gamma_{\epsilon,\phi} = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{\pm i\phi}\,,\; r \geq \epsilon\} \cup \{z \in \mathbb{C} :\; \epsilon e^{i\theta} : |\theta| \leq \phi\}$$

يتم توجيه هذا المسار بحيث يزداد الجزء التخيلي و هو يقسم المستوى العقدي إلى منطقتين منفصلتين $G_\pm(\epsilon,\phi)$ حيث يمثل G_- المنطقة الى بسار و G_+ المنطقة الواقعة الى يمينه.

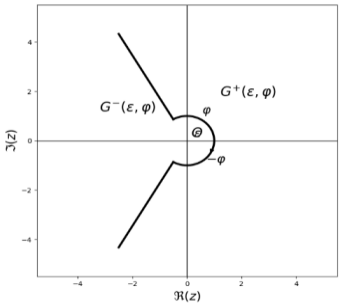
1-2-5 التمثيلات التكاملية : بالاستناد الى تمثيل مقلوب دالة جاما $\frac{1}{\Gamma z}$ واجراء التعويض المناسب $\tilde{\zeta} = \zeta^{\frac{1}{\alpha}}$. **[13]**

مبرهنة (2) :- نفرض أن $\alpha \in (0\,,2)$ و $\beta \in \mathbb{C}$ لكل $\epsilon > 0$

يمكن صياغة المبرهنة التالية التي تحدد السلوك التحليلي للدالة $E_{\alpha,\beta}(z)$ و زاوية ϕ تحقق الشرط $\frac{\alpha\pi}{2} < \phi < \min(\pi, \alpha\pi)$ فإن الدالة $E_{\alpha,\beta}(z)$ تمثل التمثيلات التالية

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\alpha\pi i}\int_{\Gamma_{(\epsilon,\phi)}} \frac{e^{\zeta^{\frac{1}{\alpha}}}\zeta^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}{\zeta - z}\, d\zeta \;,\quad \forall\, z \in G_-(\epsilon\,,\phi)$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{1}{2\alpha\pi i} \int_{\Gamma_{(\epsilon,\phi)}} \frac{e^{\zeta^{\frac{1}{\alpha}}} \zeta^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}{\zeta - z} d\zeta \quad , \quad \forall\, z \in G_{+}(\epsilon, \phi)$$



شكل (3)

The contour $\Gamma_{\epsilon,\phi}$ which divides C into two regions $G_{\pm}(\epsilon, \phi)$

2-2-5 السلوك التقاربي Asymptotic behavior: يُعد توصيف السلوك التقاربي للدالة $E_{\alpha,\beta}(z)$ عند $z \longrightarrow \infty$ ويتحدد السلوك التقاربي للدالة وفقا لقطاع الزاوية (argz) :

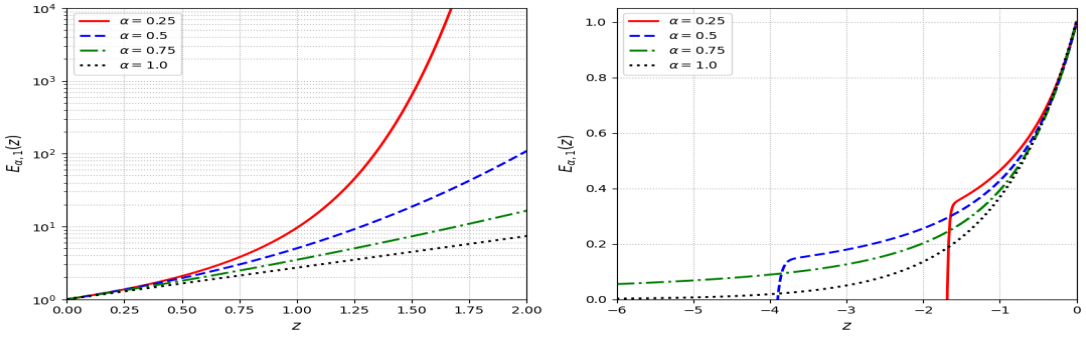
داخل القطاع $|\arg(z)| \leq \phi$:- تهيمن الحدود الاسية على السلوك وفق الصيغة الأتية

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{(1-\beta)}{\alpha}} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-N-1})$$

خارج القطاع $\phi \leq |\arg(z)| \leq \pi$:- تضمحل الدالة وفقا للسلسلة القوية التالية

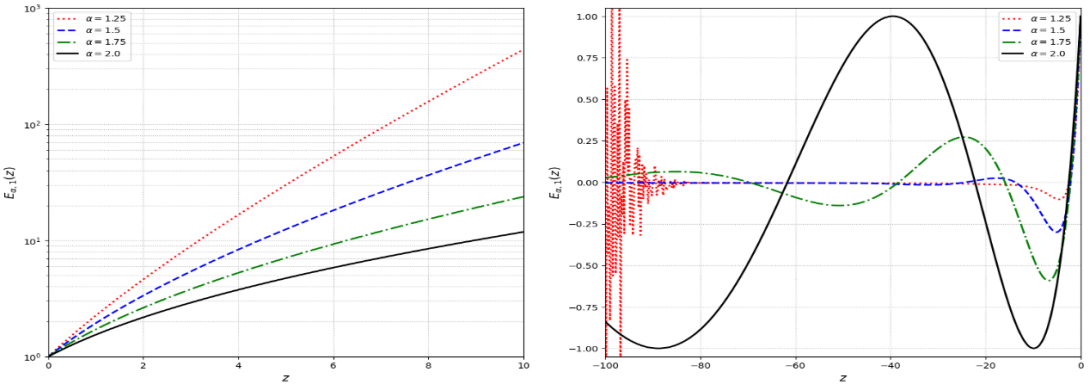
$$E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O\left(|z^{-N-1}|\right)$$

من خلال الاشكال البيانية يمكن تلخيص الوصف التحليلي والسلوك الشامل لدالة ميتاج ـليفلر $E_{\alpha,1}(z)$ على المحور الحقيقي $\mathbb{R}$ مقسما حسب فترات α .



(a) شكل (4.1) (b)

Plots of the function $E_{\alpha,1}(z)$ for $\alpha \in (0, 1]$



(a) شكل (4.2) (b)

Plots of the function $E_{\alpha,1}(z)$ for $\alpha \in (1,2]$

من خلال الاشكال البيانية يمكن تلخيص الوصف التحليلي والسلوك الشامل لدالة ميتاج $E_{\alpha,1}(z)$ على المحور الحقيقي $\mathbb{R}$ مقسما حسب فترات α .

1. سلوك الدالة على المحور الحقيقي الموجب $\mathbb{R}^+$:- يبين الشكلان (4.1a) و (4.2a)أن دالة ميتاج–ليفلر $E_{\alpha,1}(z)$ تكون موجبة ومتزايدة على المحور الحقيقي الموجب لجميع قيم α المدروسة، إلا أن معدل النمو يتغير بصورة ملحوظة باختلاف قيمة المعلمة α.
   - سلوك النمو:- تزداد الدالة بصورة مستمرة مع زيادة z، ويصبح هذا النمو أسرع كلما انخفضت قيمة α .وعندما تقترب من الصفر يزداد معدل النمو بدرجة كبيرة، بحيث تبلغ الدالة قيمًا مرتفعة جدًا حتى عند قيم صغيرة نسبيًا لـ z، كما يظهر في الشكل.(4.1a) .
   - تأثير المعلمة α:- يتبين وجود علاقة عكسية بين قيمة α ومعدل النمو؛ فكلما صغرت α ازداد نمو الدالة، بينما يؤدي ازدياد α الى تباطؤ هذا النمو بصورة واضحة.
   - الرتابة:- تبقى الدالة متزايدة رتيبًا على كامل المجال $z > 0$، ولا تظهر أي تذبذبات أو نقاط انقلاب، مما يعكس الطبيعة المنتظمة للدالة على المحور الحقيقي الموجب.
2. سلوك الدالة على المحور الحقيقي السالب $\mathbb{R}^-$: يتغير السلوك بصورة جوهرية تبعًا لقيمة المعلمة α، ويمكن تمييز حالتين رئيسيتين.

الفترة الاولى عندما $0 < \alpha \leq 1$ (الشكل 4.1b) .

- الاضمحلال :تتناقص الدالة تدريجيًا مع تناقص z، وتؤول إلى الصفر عندما $z \to -\infty$. ويكون هذا الاضمحلال أبطأ من الاضمحلال الأسي للدالة e^z، وهو ما يعكس خاصية الذاكرة طويلة الأمد المرتبطة بدالة ميتاج–ليفلر.
- الرتابة وعدم وجود أصفار :يبقى المنحنى فوق المحور الحقيقي، ويتناقص بصورة رتيبة وسلسة دون أن يقطع محور السينات، أي لا تظهر أصفار حقيقية سالبة للدالة في هذا المجال.

الفترة الثانية عندما $1 < \alpha \leq 2$ (الشكل 4.2 b) .

- السلوك التذبذبي :يختلف السلوك بصورة جذرية عن الحالة السابقة، إذ تفقد الدالة خاصية الرتابة، وتبدأ في التذبذب حول الصفر و تظهر للدالة نقاط عظمى محلية ونقاط صغرى محلية متعاقبة على المجال المدروس.
- تأثير المعلمة α:- يزداد وضوح السلوك التذبذبي كلما اقتربت α من القيمة 2، حيث تصبح الموجات أكثر انتظامًا وأقرب إلى الدوال المثلثية .

الفترة الثانية الحالة الخاصة $\alpha = 2$:

مثل القيمة $\alpha = 2$ حالة خاصة، إذ تختزل دالة ميتاج–ليفلر إلى

$$E_{2,1}(z) = \cos(\sqrt{-z})$$

ولذلك يتحول المنحنى على المحور الحقيقي السالب إلى موجة جيبية منتظمة ذات سعة ثابتة، فلا يظهر أي اضمحلال مع ازدياد $|z|$، وهو ما يميز هذه الحالة عن جميع القيم الأخرى للمعلمة α.

3- الاستنتاجات التحليلية المستخلصة من السلوك البياني لدالة ميتاج–ليفلر **:-**

يُظهر التحليل السابق أن المعلمة α تمثل العامل الرئيسي الذي يحكم السلوك النوعي لدالة ميتاج–ليفلر؛ إذ يحدث انتقال واضح من سلوك أحادي الرتابة مع اضمحلال بطيء عندما $0 < \alpha \leq 1$، إلى سلوك تذبذبي مع ظهور أصفار حقيقية عندما $1 < \alpha \leq 2$. ويعكس هذا الانتقال الدور المحوري للدالة في نمذجة كلٍّ من عمليات الاسترخاء الشاذ والظواهر الموجية في معادلات التفاضل الكسري.

6. حلول المعادلات التفاضلية الكسرية باستخدام دالة ميتاغ–ليفلر وتطبيقاتها الفيزيائية والديناميكية :

Solutions of fractional differential equations using the Mittag–Leffler function and their physical and dynamical applications:

تحتل دالة ميتاج–ليفلر مكانةً أساسية في نظرية المعادلات التفاضلية الكسرية، و ذلك للدور البارز الذي تؤديه في تمثيل حلول العديد من المسائل الفيزيائية والهندسية.

1-6 تطبيقات في اللزوجة المرنة وديناميكا الاسترخاء الكسري:

Applications in Viscoelasticity and Relaxation Dynamics

تتبوأ دالة ميتاج وتعميماتها مكانه مركزية في نظرية المعادلات التفاضلية الكسرية حيث تمثل النواة التحليلية لتوليد حلول المنظومات الديناميكية ذات الذاكرة غير المحلية ويتجلى الدور الوظيفي لهذه الدوال بوضوح عند دراسة التعميم الكسري لنموذج الاسترخاء الاسي من الرتبة الأولى في فضاء الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}^+$ تأسيسا على ذلك نورد مسألة القيمة الابتدائية الكلاسيكية .**[12]**.

$$\frac{du}{dt} = -u(t), \quad t \geq 0, \quad with\ u(0^+) = 1 \quad (1-6)$$

والتي يؤول حلها التحليلي للدالة الاسية $u(t) = e^{-t}$

ولتعميم مسألة (1-6) باستخدام المؤثرات الكسرية ذات الرتبة $\alpha \in (0,1)$ بواسطة ثلاث معادلات كسرية .

Case (a) : ${}_0^C D_t^\alpha u(t) = -u(t), t \geq 0, whit\ u(0^+) = 1$

Case (b) : ${}_0 D_t^\alpha u(t) = -u(t)$, $t \geq 0$, $whit$ $\lim_{t\to 0^+} {}_0 I_t^{1-\alpha} u(t) = 1$

Case (c) : $\frac{du}{dt} = -\ {}_0D_t^{1-\alpha}u(t)\ ,\ t \geq 0\ ,\ with\ .\ u(0^+) = 1$

حيث يمثل ${}_0^cD_t^{\alpha}$ مشتقة كابوتو , في حين ${}_0D_t^{\alpha}$ مؤثر ريمان – ليوفيل للتفاضل الكسري و ${}_0I_t^{1-\alpha}$ مؤثر التكامل الكسري المصاحب .

نطبق تحويل لابلاس لحل المعادلا ت الكسرية الثلاث وذلك بالاعتماد على قواعد التحويل للمؤثرات التفاضلية الكسرية والشروط الابتدائية المقترنة بها من خلال التحليل الطيفي في فضاء لابلاس ، نجد ان المسالتين a , b متكافئتان حيث يؤول تحويل لابلاس لحل كلتا الحالتين الى الصيغة الجبرية التالية

$$\tilde{u}(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1}$$

وعلى النقيض من ذلك ، فإن التحليل الجبري للحالة (b) المقترنة بشرط ابتدائي غير محلي يعطي بالصيغة

$$\tilde{u}(s) = \frac{1}{s^{\alpha}+1} = 1 - s[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1}]$$

ان الانتقال من حيز لابلاس الى الحيز الزمني يكشف الأهمية التطبيقية القصوى لدوال ميتاج - ليفلر ، حيث لا تقع هذه الحلول العكسية ضمن فضاء الدوال الابتدائية بالاعتماد على ازواج تحويل لابلاس المعروفة المستقاه من الخصائص التحليلية لدوال ميتاج – ليفلر ، نورد العلاقتين التالتين

$$L\{E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})\};s\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1}\ ,\qquad L\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha});s\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+\lambda}$$

بناء على ما تقدم يؤول الحل التحليلي للحالتين a, c في الفضاء الزمني الى الصيغة المباشرة بدلالة دالة ميتاج -ليفلر

$$u(t) = \psi_{\alpha}(t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha})\ ,\ t \geq 0\quad ,\quad 0 < t < 1$$

اما بالنسبة للحالة b

$$u(t) = \phi_{\alpha}(t) = t^{-(1-\alpha)}E_{\alpha,\alpha}(-t^{\alpha}) = -\frac{d}{dt}E_{\alpha}(-t^{\alpha})\ ,t \geq 0\ ,\ 0 < t < 1$$

يكمن جوهر أهمية هذا النموذج الرياضي في إمكانية دالة ميتاج على إحدا ث استكمال داخلي دقيق للغاية ، فحينما تقتر ب الرتبة الكسرية من الواحد الصحيح $(t \to 1)$،يستعيد النموذج طابعه الاسي التقليدي المعتاد $E_1(-t) = e^{-t}$ ، بينما في الفترات الزمنية الممتدة $(t \to \infty)$ ،يظهر الحل سلوكا ممتدا على هيئة علاقة قوى جبرية ، وهو التوصيف الرياضي الدقيق لظواهر الذاكرة الطويلة المدى والاسترخاء الشاذ المرتبط ديناميكيا بالمنظومات المعقدة واللزجة المرنة.

2-6 حلول المعادلات التفاضلية الكسرية الغير المتجانسة [16]:

مثال (1) حل المعادلة التفاضلية الكسرية

$${}^cD_0^{\alpha}(t) + \lambda y(t) = t^{\gamma}\ ,\qquad [\gamma > -1\ .0 < \alpha \leq 1, y(0) = 0]$$

الحل:- بتطبيق تحويل لابلاس ، وعلما بأن

$$L\{t^{\gamma}\} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{s^{\gamma+1}}$$

$$s^{\alpha}Y(s) + Y(s) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{s^{\gamma+1}}$$

نعيد كتابة الكسر على النحو التالي لتسهيل التحويل العكسي

$$Y(s) = \Gamma(\gamma+1)[\frac{s^{\alpha-(\alpha+\gamma+1)}}{s^{\alpha}-(-\lambda)}]$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي باستخدام صيغة المعلمتين $\beta = \alpha + \gamma + 1$ نصل الى الحل

$$y(t) = \Gamma(\gamma+1)\ t^{\alpha+\gamma}E_{\alpha,\alpha+\gamma+1}(-\lambda t^{\alpha})$$

مثال (2) :-حل المعادلة التفاضلية

$${}^cD_0^{\alpha}y(t) + \lambda y(t) = e^{\alpha t}\ ,\ 0 < \alpha \leq 1\ , y(0) = 0$$

الحل :- نطبق تحويل لابلاس

$$L\{ {}^{c}D_0^{\alpha} y(t)\} = s^{\alpha}Y(s) \quad , \quad L\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}$$

إذن نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة نحصل على

$$s^{\alpha}Y(s) + \lambda Y(s) = \frac{1}{(s-k)} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-k)(s^{\alpha}+\lambda)}$$

بما أن لا يوجد تحويل مباشر لهذا الكسر ، لذلك نستخدم مبرهنة الالتفاف (convolution)

و لذلك نكتب كل عامل على حدة ، لدينا $L\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}$ و $L\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha})\} = \frac{1}{s^{\alpha}+\lambda}$

إذن

$$Y(s) = L\{e^{kt}\}L\{t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda\tau^{\alpha})\}$$

والخطوة الأخيرة نستخدم مبرهنة الالتفاف

$$Y(s) = F(s) * G(s)$$

في المثال

$$f(t) = e^{kt} \quad \text{و} \quad g(t) = \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha})$$

إذن الحل النهائي

$$y(t) = \int_0^t e^{k(t-\tau)}\tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda\tau^{\alpha})d\tau$$

مثال (3): حل المعادلة التفاضلية الكسرية

$${}^{c}D_0^{\alpha}y(t) + \lambda y(t) = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\mu t^{\alpha}) \quad , \quad y(0) = 0$$

الحل:

$$L\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\mu t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\mu}$$

$$Y(s) = \frac{s^{\alpha-\mu}}{(s^{\alpha}-\mu)(s^{\alpha}+\lambda)}$$

بتحليل الكسور الجزئية

$$\frac{1}{(s^{\alpha}-\mu)(s^{\alpha}+\mu)} = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\frac{1}{s^{\alpha}-\mu} - \frac{1}{s^{\alpha}+\mu}\right)$$

$$y(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\lambda+\mu}[E_{\alpha,\beta}(\mu t^{\alpha}) - E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})]$$

ما تم استنتاجه من الأمثلة السابقة أنها تختلف طبيعة حلول المعادلات التفاضلية الكسرية باختلاف الطرف غير المتجانس وبنية تحويل لابلاس المقابل له. ففي بعض الحالات يمكن الحصول على حل مغلق (Closed form solution) يُعبَّر عنه بدلالة دوال خاصة مثل دالة ميتاج–ليفلر، بينما في حالات أخرى يُكتب الحل على صورة تكامل التفاف (Convolution Integral) نتيجة لتطبيق مبرهنة الالتفاف في تحويل لابلاس .

وفي ما يلي نستعرض نوعية الحل للأمثلة السابقة ، بالنسبة للمثالين الأول والرابع نوعية الحلول مغلقة "لأنها لا تحت وي على تكامل " بل مكتوبة بدلالة دالة ميتاج .

اما المثالين الثاني والثالث فنوعية الحلول "حلول التفاف" لأنها تحتوي على تكامل التفاف.

7. النتائج:

1. أثبت البحث أن دوال ميتاج–ليفلر تمثل التوسع الطبيعي للدالة الأسية في الحساب الكسري، وأنها تحتوي العديد من الدوال الأولية والخاصة كحالات خاصة، مثل الدالة الأسية والدوال المثلثية والزائدية ودالة الخطأ.
2. بينت الدراسة أن دوال ميتاج–ليفلر وتعميماتها)ذات المعلمتين ودالة برابهاكار(توفر إطارًا رياضيًا موحدًا ومرنًا لنمذجة الأنظمة ذات الذاكرة والتأثيرات غير المحلية وحل المعادلات التفاضلية الكسرية .

3. تم اشتقاق وإثبات التمثيل التحليلي لدالة ميتاج–ليفلر بدلالة دالة فوكس H باستخدام تكاملات ميلين–بارنز ونظرية البواقي، مما وسّع إمكانيات دراسة خصائصها التحليلية والتقاربية .
4. أكدت النتائج أن التحويلات التكاملية، ولا سيما تحويل لابلاس وتحويل ميلي ن –بارنز، تمثل أدوات فعالة لتبسيط حلول المعادلات الكسرية وتحليل السلوك التقاربي والاستقرار الرياضي لدوال ميتا ج–ليفلر .
5. أوضحت الدراسة من الناحيتين النظرية والعددية أن دوال ميتاج–ليفلر تتسم بقدرة فائقة على وصف ظواهر الاسترخاء الكسري والانتشار الشاذ واللزوجة المرنة، وأن سلوكها يتغير من الاضمحلال إلى التذبذب بحسب قيمة المعلمة α ، مما يؤكد فعاليتها في النمذجة الفيزيائية والهندسية المعاصر.

8. التوصيات:

- **تطوير خوارزميات عددية متقدمة :**التوسع في استخدام لغة البايثون والمكتبات الحسابية لتطوير خوارزميات ذات دقة عالية حساب دوال ميتاج-ليفلر متعددة المعاملات (كدالة برابهاكار) عند القيم العقدية الحرجة .

References

[1] Miller, K. S., & Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and Equations fractional differential (No Title) ,
[2] Mathai, A. M., & Haubold, H. J. (2008). Special functions for applied scientists . New York, NY: Springer New York .
[3] Fallahgoul, H. A., Focardi, S. M., & Fabozzi, F. J. (2017). Fractional calculus and fractional processes with applications to financial economics: Theory and application. Academic Press.
[4] Podlubny, I. (1998). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications (Vol. 198). elsevier.
[5] Atanackovic, T. M., Pilipovic, S., Stankovic, B., & Zorica, D. (2014). Fractional calculus with applications in mechanics: vibrations and diffusion processes. John Wiley & Sons.
[6] Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F., & Rogosin, S. V. (2020). Mittag-Leffler functions, related topics and applications (Vol. 1451). Berlin: Springer.
[7] Bateman, H. (1953). Higher transcendental functions:(vol 3).
[8] Ahmed, S. (2013). On some problems of special functions [Doctoral dissertation, Aligarh Muslim [8] University]. Maulana Azad Library ,
[9] Mainardi, F. (2011). On the distinguished role of the Mittag-Leffler and Wright functions in fractional calculus. Special functions in the, 21, 6-8.
[10] Mathai, A. M., & Haubold, H. J. (2017). Matrix methods and fractional calculus. World Scientific.
[11] Mathai, A. M., Saxena, R. K., & Haubold, H. J. (2009). The H-function: theory and applications. Springer Science & Business Media.

[12] Mainardi, F. (2010). Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity.
[13] Jin, B. (2021). Fractional differential equations (Vol. 206). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
[14] Diethelm, K., & Ford, N. J. (2010). The analysis of fractional differential equations . Lecture notes in mathematics .2004 .
[15] Das, S. (2011). Functional fractional calculus (Vol. 1). Berlin: Springer.
[16] Kibas A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006) Theory and applications of fractional differential equations Elsevier .
[17] Prabhakar, T. R. (1971). A singular integral equation with a generalized Mittag Leffler function in the kernel. Yokohama Mathematical journal .

.